Nom : .... Prénom :	**DS 01**	TMEX OISELET Devoir n° 02	Oct. 2022 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *3 points*

3 pts Compléter

1. Si $z = 5 + 3\mathrm{i}$ alors $\bar{z} = 5 - 3\mathrm{i}$
2. Si $z = 1 + \mathrm{i}$ alors $z^3 = (1+\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2) = (1+\mathrm{i}) \times 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i}$

$$\boxed{\text{Si } z = 1 + \mathrm{i} \text{ alors } z^3 = -2 + 2\mathrm{i}}$$

3. Si $z = x + \mathrm{i}y$ alors $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Exercice 2 — *3 points*

3 pts

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :(détailler les calculs !)

$$(2-5i)^2, \quad \frac{1}{1+2i}, \quad \frac{3+i}{1-4i}, \quad \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}.$$

$$\begin{aligned}(2-5i)^2 &= 2^2 - 2\times 2\times 5i + (5i)^2\\ &= 4 - 20i + 25i^2\\ &= 4 - 25 - 20i\\ &= -21 - 20i\end{aligned}$$

$$\boxed{(2-5i)^2 = -21 - 20i}$$

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1-4i} &= \frac{(3+i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}\\ &= \frac{3+12i+i+4^2}{1^2+4i^2}\\ &= \frac{3+13i-4}{17}\\ &= \frac{-1+13i}{17}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{3+i}{1-4i} = \frac{-1+13i}{17}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2i} &= \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}\\ &= \frac{1-2i}{1^2+2^2}\\ &= \frac{1-2i}{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} &= \frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{2}{1^2+1^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = 1}$$

Exercice 3 — 3 points

3 pts Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = x + iy$ où x et y désignent des nombres réels.
On donne $f(z) = z^2 - 2iz + 3 + \mathrm{i}$.
Calculer $Re(f(z))$ et $Im(f(z))$ en fonction de x et y.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 - 2iz + 3 + \mathrm{i} \\ &= (x + \mathrm{i}y)^2 - 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3 + \mathrm{i} \\ &= x^2 + 2x \times \mathrm{i}y + (\mathrm{i}y)^2 - 2\mathrm{i}x - 2i^2y + 3 + \mathrm{i} \\ &= x^2 + \mathrm{i}2xy - y^2 - \mathrm{i} \times 2x + 2y + 3 + \mathrm{i} \\ &= x^2 - y^2 + 2y + 3 + \mathrm{i}(2xy - 2x + 1) \\ &= Re(f(z)) + \mathrm{i}Im(f(z)) \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, il vient :

$$\boxed{Re(f(z)) = x^2 - y^2 + 2y + 3 \text{ et } Im(f(z)) = 2xy - 2x + 1}$$

Exercice 4 — 4 points

4 pts

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $-3\mathrm{i}z + 3 + \mathrm{i} = 2 - 3\mathrm{i}$;

$$\begin{aligned} -3\mathrm{i}z + 3 + \mathrm{i} = 2 - 3\mathrm{i}; &\iff -3\mathrm{i}z = -1 - 4\mathrm{i} \\ &\iff z = \frac{1 + 4\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} \\ &\iff z = \frac{(1 + 4\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{3\mathrm{i}(-\mathrm{i})} \\ &\iff z = \frac{4 - \mathrm{i}}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{4 - \mathrm{i}}{3}\right\}}$$

(E_2) : $2\mathrm{i}z + 3\bar{z} = 1 + \mathrm{i}$; On pose $z = x + iy$
$2iz + 3\bar{z} = 1 + \mathrm{i} \iff 2i(x + iy) + 3(x - iy) = 1 + i$
$2ix - 2y + 3x - 3iy = 1 + i$
$3x - 2y + i(2x - 3y) = 1 + i$
En identifiant partie réelle et partie imaginaire il vient :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x = 1 \\ 5y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} \\ y = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1 - \mathrm{i}}{5}\right\}}$$

Exercice 5 — 3 points

3 pts Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + 16 = 0; \qquad z^2 + 8z + 20 = 0$$

$$\begin{aligned} z^2 + 16 = 0 &\iff z^2 - 16i^2 = 0 \\ &\iff z^2 - (4\mathrm{i})^2 = 0 \\ &\iff (z - 4\mathrm{i})(z + 4\mathrm{i}) = 0 \\ &\iff z = 4\mathrm{i} \text{ ou } z = -4\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\mathrm{i}; -4\mathrm{i}\}}$$

Résolution de $z^2+8z+20=0$
$\Delta = b^2-4ac = 64-80 = -16$. Comme $\Delta < 0$, l'équation a deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-8+4\mathrm{i}}{2} = -4+2\mathrm{i} \qquad z_2 = \overline{z_1} = -4-2\mathrm{i}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-4+2\mathrm{i}; -4-2\mathrm{i}\}}$$

Exercice 6 — 5 points

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante :

$$z^3+7z^2+17z+15=0$$

1 pt **1** Montrer que -3 est solution de l'équation.
En posant $P(z) = z^3+7z^2+17z+15$, on a

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^3+7(-3)^2+17\times(-3)+15 \\ &= -27+63-51+15 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{-3 est donc une racine de cette équation.}}$$

2 pts **2** Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$z^3+7z^2+17z+15 = (z+3)(az^2+bz+c)$$

Comme -3 est une racine de P ; le polynôme $P(z)$ se factorise par $(z+3)$,
ainsi il existe un polynôme $Q(z) = az^2+bz+c$ tel que $P(z) = (z+3)(az^2+bz+c)$

$$\begin{aligned} P(z) &= (z+3)(az^2+bz+c) \\ &= az^3+bz^2+cz+3az^2+3bz+3c \\ &= az^3+(b+3a)z^2+(c+3b)z+3c \\ \text{Or } P(z) &= z^3+7z^2+17z+15 \end{aligned}$$

En identifiant les termes de même degré, il vient :

$$\begin{cases} a=1 \\ b+3a=7 \\ c+3b=17 \\ 3c=15 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=7-3a=7-3=4 \\ c=17-3b=5 \\ c=5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } P(z) = (z+3)(z^2+4z+5)}$$

2 pts **3** Résoudre alors cette équation.

$$\begin{aligned} z^3+7z^2+17z+15=0 &\iff z+3=0 \text{ ou } (z^2+4z+5)=0 \\ &\iff z=-3 \text{ ou } (z^2+4z+5)=0 \end{aligned}$$

Résolution de $z^2+4z+5=0$
$\Delta = b^2-4ac = 16-20=-4$. Comme $\Delta<0$, l'équation a deux racines complexes conjuguées

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} & z_2 &= \overline{z_1} \\ &= \frac{-4+2\mathrm{i}}{2} & &= -2-i \\ &= -2+\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-3;-2+\mathrm{i};-2-\mathrm{i}\}}$$

Exercice 7 — 2 points

2 pts Calculer la somme :

$$S=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{i}^{2022}$$

S est la somme de 2023 termes de la suite géométrique de premier terme 1 de raison i, ainsi en utilisant la formule sur la somme de termes consécutifs on a :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1-\text{Raison}^{\text{Nombres de termes}}}{1-\text{Raison}}\times\text{Premier terme} \\ &= \frac{1-\mathrm{i}^{2023}}{1-\mathrm{i}}\times 1 \\ &= \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \\ &= \frac{(1+\mathrm{i})^2}{1+1} \\ &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\mathrm{i}^{2023}=\mathrm{i}^{2020}\times\mathrm{i}^3=\left(i^4\right)^{505}\times(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}$$

$$\boxed{S=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{i}^{2022}=\mathrm{i}}$$